

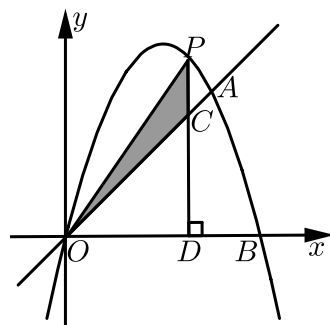
第2讲 二次函数之线段、面积问题加油站

一、单线段最值问题

练习1

1. 2019年河南驻马店汝南县汝南县三门闸乡第一初级中学初三一模第23题 ★★★★★

如图，已知二次函数的图象经过点 $A(3,3)$ 、 $B(4,0)$ 和原点 O 。 P 为二次函数图象上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 $D(m,0)$ ，并与直线 OA 交于点 C 。



- (1) 求出二次函数的解析式。
(2) 当点 P 在直线 OA 的上方时，求线段 PC 的最大值。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x$.

(2) $\frac{9}{4}$.

【解析】 (1) 设 $y = ax(x-4)$,

把 A 点坐标 $(3,3)$ 代入得： $a = -1$,

函数的解析式为 $y = -x^2 + 4x$.

(2) $0 < m < 3$, $PC = PD - CD$,

$\because D(m,0)$, $PD \perp x$ 轴 , P 在 $y = -x^2 + 4x$ 上 , C 在 OA 上 , $A(3,3)$,

$\therefore P(m, -m^2 + 4m)$, $C(m, m)$,

$\therefore PC = PD - CD = -m^2 + 4m - m = -m^2 + 3m$,

$= -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$,

$\because 1 < 0$, 开口向下 ,

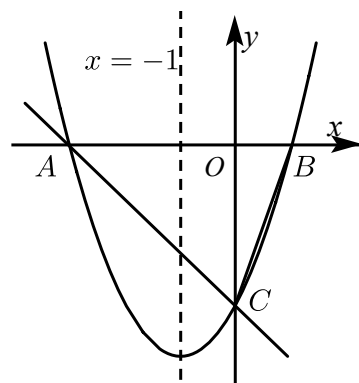
$\therefore$ 有最大值 ,

当 $D\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 时 , $PC_{max} = \frac{9}{4}$.

【标注】 【题型】 题型：二次函数与动点问题

2. 2017~2018学年黑龙江哈尔滨双城市初三上学期期末第27题 ★★★★★

如图，对称轴为直线 $x = -1$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴相交于 A, B 两点。



(1) 若点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，求点 B 的坐标。

(2) 若已知 $a = 1$ ，点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ， C 为抛物线与 y 轴的交点。

① 若点 P 在抛物线上，且 $S_{\triangle POC} = 4S_{\triangle BOC}$ ，求点 P 的坐标。

② 设点 Q 是线段 AC 上的动点，作 $QD \perp x$ 轴交抛物线于点 D ，求线段 QD 长度的最大值。

【答案】 (1) $(2, 0)$ 。

(2) ① 点 P 的坐标为 $(-4, 5)$ 或 $(4, 21)$ 。

② QD 的最大值为 $\frac{9}{4}$ 。

【解析】 (1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, 0)$ 。

(2) ① $\because a = 1$ ，点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = (x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$ ，

又 $\because$ 点 C 为抛物线与 y 轴的交点，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -3)$ 。

设点 P 的坐标为 $(x, x^2 + 2x - 3)$ ，

$\because S_{\triangle POC} = 4S_{\triangle BOC}$ ，

$\therefore \frac{1}{2}|x| \cdot OC = 4 \times \frac{1}{2}OB \cdot OC$ ，即 $|x| = 4$ ，

$\therefore x = \pm 4$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, 5)$ 或 $(4, 21)$ 。

② $\because$ 点 $A(-3, 0)$ ，点 $C(0, -3)$ ，

$\therefore$ 直线 AC 解析式 $y = -x - 3$ ，

$\therefore$ 设点 $Q(m, -m - 3) (-3 \leq m \leq 0)$ ，

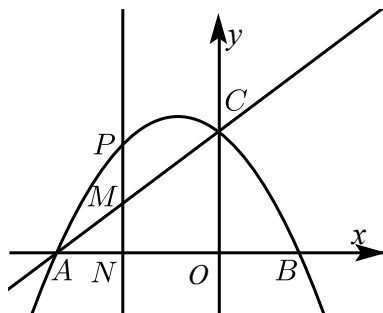
则点 $D(m, m^2 + 2m - 3)$ ，

$\therefore QD = -m - 3 - (m^2 + 2m - 3) = -(m + \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$ ，

$\therefore$ 当 $m = -\frac{3}{2}$ 时， QD 的最大值为 $\frac{9}{4}$ 。

3. 2019年河南许昌长葛市长葛市第一初级中学初三中考一模第23题11分 ★★★★★

如图，抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 交 x 轴负半轴于点 A ，交 y 轴于点 C ，交 x 轴正半轴于点 B 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 点 P 为抛物线上任意一点，设点 P 的横坐标为 x 。

- ① 若点 P 在第二象限，过点 P 作 $PN \perp x$ 轴于 N ，交直线 AC 于点 M ，求线段 PM 关于 x 的函数解析式，并求出 PM 的最大值。
- ② 若点 P 是抛物线上任意一点，连接 CP ，以 CP 为边作正方形 $CPEF$ ，当点 E 落在抛物线的对称轴上时，请直接写出此时点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 。

(2) ① $\frac{3}{2}$ 。

② 点 P 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ 或 $(2, 0)$ 或 $(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ 。

【解析】(1) 当 $x = 0$ 时， $y = \frac{3}{4}x + 3 = 3$ ，则 $C(0, 3)$ ；

当 $y = 0$ 时， $\frac{3}{4}x + 3 = 0$ ，解得 $x = -4$ ，则 $A(-4, 0)$ ，

把 $A(-4, 0)$ ， $C(0, 3)$ 代入 $y = -\frac{3}{8}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} -6 - 4b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ c = 3 \end{cases}$ ，

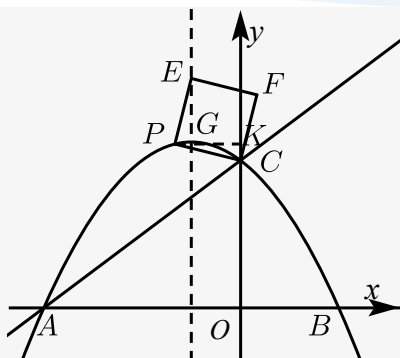
$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$ 。

(2) ① 设 $P(x, -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3)$ ($-4 < x < 0$)，则 $M(x, \frac{3}{4}x + 3)$ ，

$\therefore PM = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 - (\frac{3}{4}x + 3) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{3}{8}(x+2)^2 + \frac{3}{2}$ ，

当 $x = -2$ 时，线段 PM 的长有最大值，最大值为 $\frac{3}{2}$ 。

② 作 $PK \perp y$ 轴于 K ，交抛物线的对称轴于 G ，如图，



$\therefore$ 四边形 $PEFC$ 为正方形 ,

$\therefore PE = PC, \angle EPC = 90^\circ$

$\therefore \angle PGE = \angle PKC = 90^\circ$,

$\therefore \angle PEG = \angle CPK$,

易得 $\triangle PEG \cong \triangle CPK$,

$\therefore CK = PG$,

设 $P\left(x, -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3\right)$, 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$, 则

$G\left(-1, -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3\right), K\left(0, -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3\right)$,

$\therefore PG = |-1 - x| = |x + 1|, CK = \left|-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3 - 3\right| = \left|-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right|$,

$\therefore |x + 1| = \left|-\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x\right|$,

解方程 $x + 1 = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x$, 得 $x_1 = -4, x_2 = -\frac{2}{3}$;

解方程 $x + 1 = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$, 得 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{4}{3}$;

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 或 $(2, 0)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

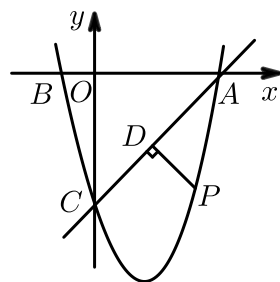
【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

练习2

4. 2020年天津南开区初三中考二模第25题10分 ★★★★★

如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 B 的坐标为 $(-1, 0)$, 且 $OA = OC = 4OB$, 抛物线

$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过 A, B, C 三点 .



(1) 求 A, C 两点的坐标 .

(2) 求抛物线的解析式 .

- (3) 若点 P 是直线 AC 下方的抛物线上的一个动点，作 $PD \perp AC$ 于点 D ，当 PD 的值最大时，求此时点 P 的坐标及 PD 的最大值。

【答案】 (1) A 、 C 两点的坐标分别为 $(4, 0)$ ， $(0, -4)$ 。

(2) $y = x^2 - 3x - 4$ 。

(3) $P(2, -6)$ ， PD 最大值为 $2\sqrt{2}$ 。

【解析】 (1) $\because B(-1, 0)$ ， $\therefore OB = 1$ ， $\therefore OA = OC = 4OB = 4$ ，

故 A 、 C 两点的坐标分别为 $(4, 0)$ ， $(0, -4)$ 。

(2) 设抛物线的解析式为： $y = a(x+1)(x-4) = a(x^2 - 3x - 4)$ ，

将 $C(0, -4)$ 代入得： $-4a = -4$ ，

解得： $a = 1$ ，

故抛物线的解析式为： $y = x^2 - 3x - 4$ 。

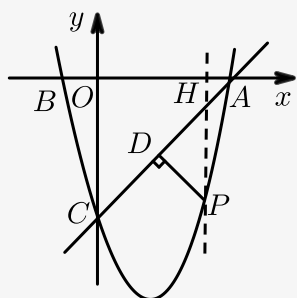
(3) $\because$ 直线 CA 过点 $C(0, -4)$ ，

$\therefore$ 设其函数表达式为： $y = kx - 4$ ，

将 $A(4, 0)$ 代入，得 $4k - 4 = 0$ ，解得： $k = 1$ ，

故直线 CA 的表达式为： $y = x - 4$ ，

过点 P 作 y 轴的平行线交 AC 于点 H ，



$\because OA = OC = 4$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$ ，

$\because PH \parallel y$ 轴，

$\therefore \angle PHD = \angle OCA = 45^\circ$ ，

设点 $P(x, x^2 - 3x - 4)$ ，则点 $H(x, x - 4)$ ，

$$PD = HP \cdot \sin \angle PHD = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 4 - x^2 + 3x + 4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2)^2 + 2\sqrt{2}$$

。

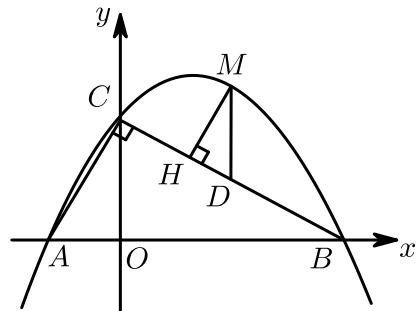
$\because -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， PD 取最大值，最大值为 $2\sqrt{2}$ ，

此时点 $P(2, -6)$ 。

5. 2017年山东东营中考真题第25题12分 ★★★★★

如图，直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 B 、 C 两点，点 A 在 x 轴上， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle OBC = 30^\circ$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + \sqrt{3}$ 经过 A 、 B 两点。



- (1) 求 A 、 B 两点的坐标。
- (2) 求抛物线的解析式。
- (3) 点 M 是直线 BC 上方抛物线上的一点，过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H ，作 $MD \parallel y$ 轴交 BC 于点 D ，求 $\triangle DMH$ 周长的最大值。

【备注】该部分讲解时学生还没有学习三角函数，因此讲解时不要涉及这部分内容

【答案】(1) $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

(2) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 。

(3) $\frac{9\sqrt{3}+9}{8}$ 。

【解析】(1) $\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 B 、 C 两点，

$$\therefore B(3, 0), C(0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OB = 3, OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle BCO = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BCO = 60^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } \frac{AO}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } AO = 1,$$

$$\therefore A(-1, 0).$$

(2) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + \sqrt{3}$ 经过 A 、 B 两点，

$$\therefore \begin{cases} a - b + \sqrt{3} = 0 \\ 9a + 3b + \sqrt{3} = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

(3) ∵ $MD \parallel y$ 轴, $MH \perp BC$,

∴ $\angle MDH = \angle BCO = 60^\circ$, 则 $\angle DMH = 30^\circ$,

∴ $DH = \frac{1}{2}DM$, $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}DM$,

∴ $\triangle DMH$ 的周长

$$= DM + DH + MH$$

$$= DM + \frac{1}{2}DM + \frac{\sqrt{3}}{2}DM$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}DM ,$$

∴ 当 DM 有最大值时, 其周长有最大值,

∵ 点 M 是直线 BC 上方抛物线上的一点,

∴ 可设 $M(t, -\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t + \sqrt{3})$, 则 $D(t, -\frac{\sqrt{3}}{3}t + \sqrt{3})$,

∴ $DM = -\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}t + \sqrt{3} - (-\frac{\sqrt{3}}{3}t + \sqrt{3})$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}t^2 + \sqrt{3}t$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} ,$$

∴ 当 $t = \frac{3}{2}$ 时, DM 有最大值, 最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

此时 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}DM = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}+9}{8}$,

即 $\triangle DMH$ 周长的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}+9}{8}$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

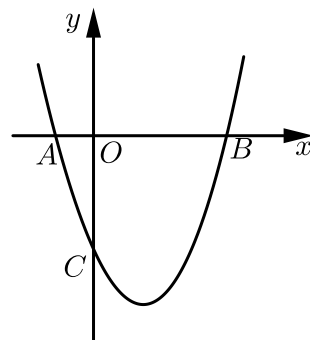
二、面积最值问题

1. 公式法

练习3

6. 2019~2020学年江西宜春初三上学期期末第21题9分 ★★★★★

如图, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点 .



- (1) 求该抛物线的解析式 .
- (2) 求该抛物线的对称轴以及顶点坐标 .
- (3) 设(1)中的抛物线上有一个动点 P , 当点 P 在该抛物线上滑动到什么位置时 , 满足 $S_{\triangle PAB} = 8$, 并求出此时 P 点的坐标 .

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 对称轴 $x = 1$, 顶点坐标 $(1, -4)$.

(3) 点 P 在该抛物线上滑动到 $(1 + 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1 - 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1, -4)$ 时 .

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点 ,

$\therefore$ 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根为 $x = -1$ 或 $x = 3$,

$\therefore -1 + 3 = -b$,

$-1 \times 3 = c$,

$\therefore b = -2$, $c = -3$,

$\therefore$ 抛物线解析式是 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴 $x = 1$, 顶点坐标 $(1, -4)$.

(3) 设 P 的纵坐标为 y_P ,

$\because S_{\triangle PAB} = 8$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot |y_P| = 8$,

$\because AB = 3 + 1 = 4$,

$\therefore |y_P| = 4$,

$\therefore y_P = \pm 4$,

把 $y_P = 4$ 代入解析式得 , $4 = x^2 - 2x - 3$,

解得 , $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$,

把 $y_P = -4$ 代入解析式得 , $-4 = x^2 - 2x - 3$,

解得 , $x = 1$,

$\therefore$ 点 P 在该抛物线上滑动到 $(1 + 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1 - 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1, -4)$ 时 , 满足

$S_{\triangle PAB} = 8$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

7. 2017~2018学年10月天津河北区天津市第二中学初三上学期月考第21题10分 ★★★

如图，抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ ，且经过点 $A(8, 14)$ 。

(1) 求该抛物线的解析式。

(2) 设该抛物线与 y 轴交于点 B ，与 x 轴相交于 C 、 D 两点(点 C 在点 D 的左边)，试求 $\triangle BCD$ 的面积。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$ 。

(2) $S_{\triangle BCD} = 3$ 。

【解析】(1) 设二次函数解析式为 $y = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}$ ，

$\because$ 二次函数过点 $A(8, 14)$ ，

$$\therefore a \times \left(8 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} = 14,$$

解得 $a = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8},$$

$$\text{整理得 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2.$$

(2) 令 $x = 0$ ，得 $y = 2$ ，

$$\therefore B(0, 2),$$

$$\therefore OB = 2,$$

令 $y = 0$ ，

$$\text{得 } \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = 0,$$

解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 4$ ，

$$\therefore C(1, 0), D(4, 0),$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} \times CD \times OB \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3.\end{aligned}$$

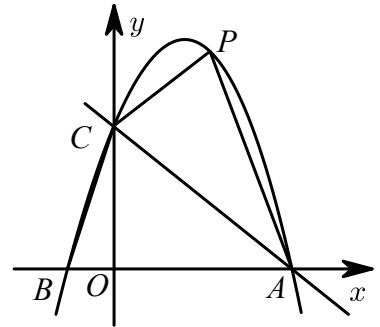
【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 割补法

练习4

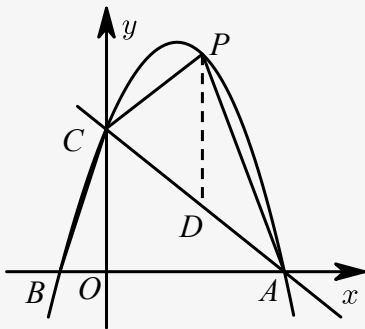
8. ★★★

如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + 3x + 4$ 与坐标轴交于 A 、 B 、 C 三点，连接 AC ，动点 P 在直线 AC 上方的抛物线上，是否存在点 P ，使得 $\triangle PAC$ 的面积最大？若存在，求出 P 点坐标及 $\triangle PAC$ 面积的最大值。



【答案】 $P(2, 6)$ ， $S_{\max} = 8$ 。

【解析】 作 $PD \parallel y$ 轴交 AC 于 D 点，如图，



易得直线 AC 的解析式为 $y = -x + 4$ ，

设 $P(x, -x^2 + 3x + 4)$ ，则 $D(x, -x + 4)$ ，

$$\therefore PD = y_P - y_D = -x^2 + 3x + 4 - (-x + 4) = -x^2 + 4x，$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PCD} + S_{\triangle PAD} = \frac{1}{2} \times PD \times (x_A - x_C) = -2x^2 + 8x$$

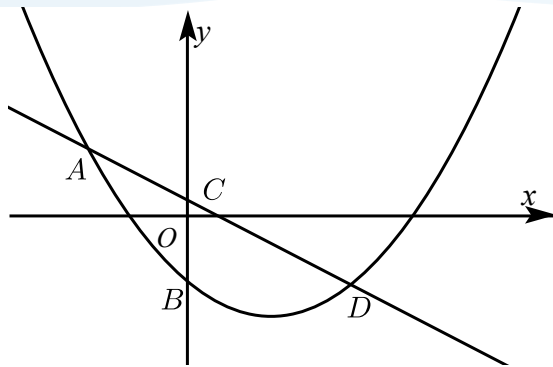
$$\text{当 } x = -\frac{b}{2a} = 2 \text{ 时， } S_{\max} = 8$$

此时 P 点坐标为 $(2, 6)$

【标注】【知识点】二次函数与面积

9. ★★★★★

如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-3, 2)$ ， $B(0, -2)$ ，其对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ， $C(0, \frac{1}{2})$ 为 y 轴上一点，直线 AC 与抛物线交于另一点 D 。



(1) 求抛物线的函数表达式.

(2) 试在线段 AD 下方的抛物线上求一点 E , 使得 $\triangle ADE$ 的面积最大, 并求出最大面积.

【答案】 (1) 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2$.

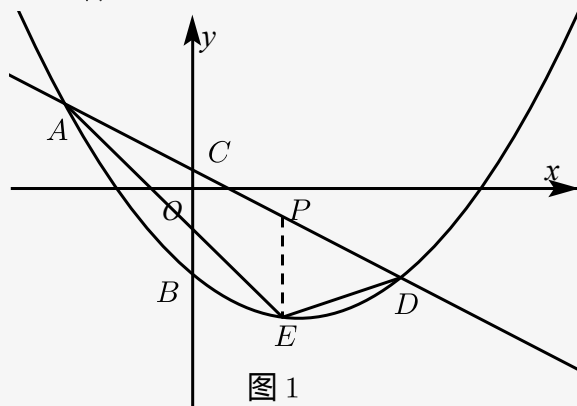
(2) $\triangle ADE$ 的最大面积为 $\frac{32}{3}$, 此时 E 点坐标为 $(1, -\frac{8}{3})$.

【解析】 (1) 根据题意得,

$$\begin{cases} 9a - 3b + c = 2 \\ c = -2 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -\frac{5}{6} \\ c = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2$.

(2) 作 $EP \parallel y$ 轴交 AD 于 P , 如图 1,



设直线 AD 的解析式为 $y = mx + n$,

把 $A(-3, 2)$, $C(0, \frac{1}{2})$ 分别代入得,

$$\begin{cases} -3m + n = 0 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases},$$

所以直线 AD 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases},$$

则 $D(5, -2)$,

设 $E(x, \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2)$ ($-3 < x < 5$) ,

则 $P(x, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} \therefore PE &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - (\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 2) \\ &= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{2} , \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle AEP} + S_{\triangle DEP}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot (5+3) \cdot (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}) \\ &= -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{32}{3} , \end{aligned}$$

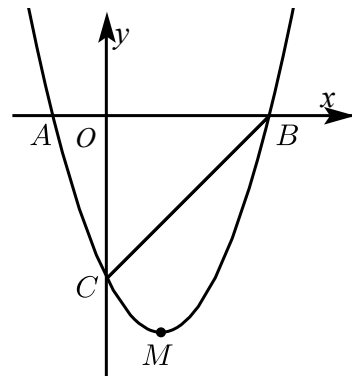
当 $x = 1$ 时, $\triangle ADE$ 的面积最大, 最大面积为 $\frac{32}{3}$, 此时 E 点坐标为 $(1, -\frac{8}{3})$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

练习5

10. ★★

如图, 在平面直角坐标系 XOY 中, 抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$, 顶点为 M . 则四边形 $OBMC$ 的面积为 () .



A. 6.5

B. 7.5

C. 8.5

D. 9.5

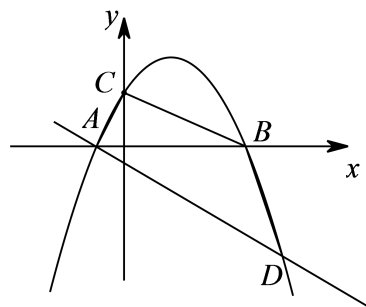
【答案】 B

【解析】 过 M 做 x 的垂线, 将面积 分成梯形面积加三角形面积 .

【标注】【知识点】二次函数与面积

11. 2018年陕西西安莲湖区远东二中初三中考四模第24题10分 ★★★

如图, 已知抛物线 M 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点, 与 y 轴交于 $C(0, 2)$ 点, 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$, 连接 AC .



- (1) 求抛物线 M 的解析式 .
- (2) 判断 $\triangle ACB$ 的形状 , 并说明理由 .
- (3) 过点 A 作 BC 的平行线 , 交抛物线 M 于另一点 D , 连接 BD . 试求出四边形 $ADBC$ 的面积 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) $\triangle ACB$ 为直角三角形 , 证明见解析 .

(3) 12.5 .

【解析】 (1) 设 B 点坐标为 $(a, 0)$,

$$\text{则有 } \frac{-1+a}{2} = \frac{3}{2} ,$$

$$\text{解得 } a = 4 , B(4, 0) .$$

$$\text{设抛物线解析式为 } y = a(x+1)(x-4) ,$$

$$\text{将 } C(0, 2) \text{ 代入 , 解得 } a = -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 .$$

$$(2) AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} ,$$

$$AB = 4 - (-1) = 5 ,$$

$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5} .$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2 ,$$

$$\therefore \triangle ACB \text{ 为直角三角形 , 且 } \angle ACB = 90^\circ .$$

(3) 设 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $C(0, 2)$, $B(4, 0)$ 代入 ,

$$\text{得 } \begin{cases} b = 2 \\ 0 = 4k + b \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} ,$$

$$\text{故 } y = -\frac{1}{2}x + 2 .$$

$$\text{设 } AD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + b ,$$

将 $A(-1, 0)$ 代入 ,

$$\text{解得 } b = -\frac{1}{2} ,$$

$$\text{故 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} .$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \end{cases},$$

解得 $x_1 = 5$, $x_2 = -1$ (舍),

将 $x = 5$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

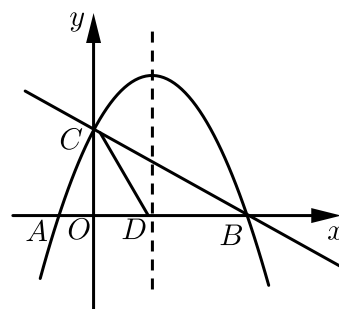
得 $y = -3$, $D(5, -3)$,

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ADBC} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot OC + \frac{1}{2}AB \cdot |y_D| \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \\ &= 12.5. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

12. 2016~2017学年10月重庆巫溪县巫溪县中学校初三上学期月考第26题12分 ★★★★★

如图, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 已知二次函数的图象经过点 B 、 C 和点 $A(-1, 0)$.



- (1) 求 B 、 C 两点坐标.
- (2) 求该二次函数的关系式.
- (3) 点 E 是线段 BC 上的一个动点, 过点 E 作 x 轴的垂线与抛物线相交于点 F , 当点 E 运动到什么位置时, 四边形 $CDBF$ 的面积最大? 求出四边形 $CDBF$ 的最大面积及此时 E 点的坐标.

【答案】 (1) $B(4, 0)$, $C(0, 2)$.

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(3) $a = 2$ 时, $S_{\text{四边形}CDBF}$ 的面积最大 $= \frac{13}{2}$, $E(2, 1)$.

【解析】 (1) 令 $x = 0$, 可得 $y = 2$,

令 $y = 0$, 可得 $x = 4$,

即点 $B(4, 0)$,

$C(0, 2)$.

(2) 设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

将点 A 、 B 、 C 的坐标代入解析式,

$$\text{得} \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases},$$

即该二次函数的关系式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

$$(3) \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\therefore B(4, 0).$$

$$\therefore BC \text{ 解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

如图, 过点 C 作 $CM \perp EF$ 于 M ,

$$\text{设 } E\left(a, -\frac{1}{2}a + 2\right), F\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2\right),$$

$$\therefore EF = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2 - \left(-\frac{1}{2}a + 2\right) = -\frac{1}{2}a^2 + 2a \quad (0 \leq x \leq 4).$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CDBF} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CEF} + S_{\triangle BEF}$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot OC + \frac{1}{2}EF \cdot CM + \frac{1}{2}EF \cdot BN$$

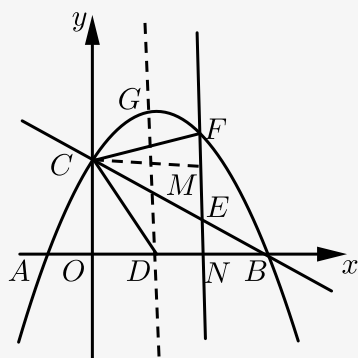
$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}a \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a\right) + \frac{1}{2}(4-a) \left(-\frac{1}{2}a^2 + 2a\right)$$

$$= -a^2 + 4a + \frac{5}{2}$$

$$= -(a-2)^2 + \frac{13}{2} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

$$\therefore a = 2 \text{ 时, } S_{\text{四边形}CDBF} \text{ 的面积最大} = \frac{13}{2},$$

$$\therefore E(2, 1).$$



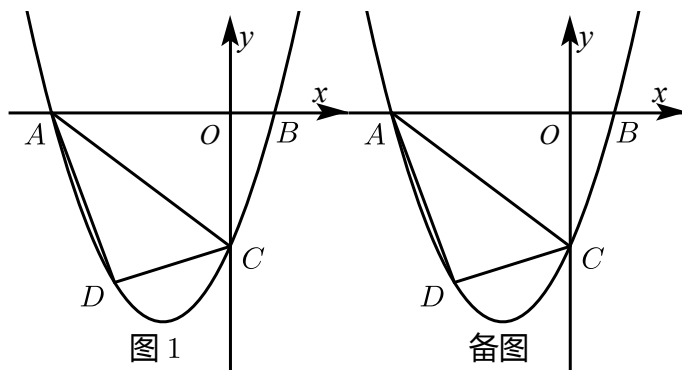
【标注】【题型】题型：二次函数与动点问题

3. 铅锤法

练习6

13. ★★★★★

已知，如图抛物线 $y = ax^2 + 3ax + c$ ($a > 0$) 与 y 轴交于 C 点，与 x 轴交于 A 、 B 两点， A 点在 B 点左侧，点 B 的坐标为 $(1, 0)$ ， $OC = 3OB$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值。

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$ 。

(2) $\frac{27}{2}$ 。

【解析】 (1) $\because$ 对称轴 $x = -\frac{3a}{2a} = -\frac{3}{2}$ ，

又 $\because OC = 3OB = 3$ ， $a > 0$ ，

$\therefore C(0, -3)$ ，

把 $B(1, 0)$ 、 $C(0, -3)$ 代入 $y = ax^2 + 3ax + c$ 得：

$$\begin{cases} c = -3 \\ a + 3a + c = 0 \end{cases}, \text{解得: } a = \frac{3}{4}, c = -3,$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3.$$

$\because$ 对称轴 $x = -\frac{3a}{2a} = -\frac{3}{2}$ ，

又 $\because OC = 3OB = 3$ ， $a > 0$ ，

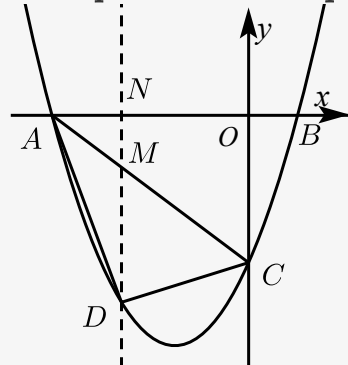
$\therefore C(0, -3)$ ，

$\because B(1, 0)$ ， $\therefore A(-4, 0)$ ，

可令 $y = a(x+4)(x-1)$ ，把 $C(0, -3)$ 代入得： $a = \frac{3}{4}$ ，

$$\therefore y = \frac{3}{4}(x+4)(x-1) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3.$$

(2)



过点 D 作 $DM \parallel y$ 轴分别交线段 AC 和 x 轴于点 M 、 N ，

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$= \frac{15}{2} + \frac{1}{2} \times MD \times (AN + ON)$$

$$= \frac{15}{2} + 2DM,$$

$$\because A(-4, 0), C(0, -3),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{代入求得: } y = -\frac{3}{4}x - 3,$$

$$\text{令 } D\left(x, \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3\right), M\left(x, -\frac{3}{4}x - 3\right),$$

$$DM = -\frac{3}{4}x - 3 - \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3\right) = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 3.$$

当 $x = -2$ 时, DM 有最大值 3,

此时四边形 $ABCD$ 面积有最大值 $\frac{27}{2}$.

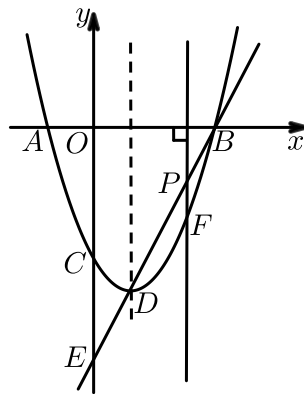
【标注】【题型】题型：二次函数与面积；题型：二次函数与平行四边形

14. 2019年天津西青区初三中考一模第25题10分 ★★★

抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .

(1) 求顶点 D 的坐标.

(2) 如图, 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值.



【答案】 (1) $(1, -4)$.

(2) 1.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} (-1)^2 - b \times (-1) + c = 0 \\ 3^2 - 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(-1, -4)$.

(2) 设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\because B(3, 0), D(1, -4),$$

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ k + b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -6 \end{cases},$$

$$\therefore BD: y = 2x - 6,$$

设 P 点的坐标为 (m, n) ,

$\because$ 点 P 为线段 BD 上一动点, 且不与 B 、 D 重合,

$$\therefore P(m, 2m - 6) (1 < m < 3),$$

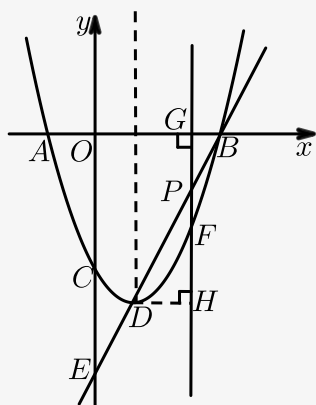
$\because$ 点 F 是过点 P 作 x 轴垂线与抛物线的交点,

$$\therefore F(m, m^2 - 2m - 3),$$

又 $\because$ 点 P 在 F 上方,

$$\therefore PF = 2m - 6 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 4m - 3,$$

设直线 PF 交 x 轴于点 G , 过点 D 作 $DH \perp PF$ 于点 H ,



$$\therefore S_{\triangle BDF} = S_{\triangle PDF} + S_{\triangle PBF}$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot DH + \frac{1}{2} PF \cdot BG$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot (DH + BG)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-m^2 + 4m - 3) \times (3 - 1)$$

$$= -m^2 + 4m - 3$$

$$= -(m - 2)^2 + 1.$$

$\therefore S_{\triangle BDF}$ 是关于 m 的二次函数,

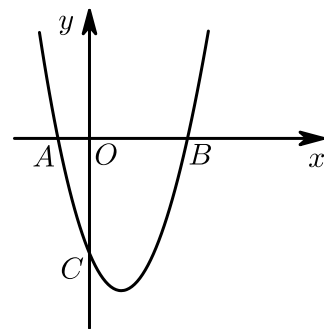
$$\because a = -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $\triangle BDF$ 面积取最大值, 最大值为 1.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

15. 2018年陕西西安莲湖区初三中考四模第24题10分 ★★★★★

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴相交于点 $A(-2, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 对称轴为直线 $x = 1$.



- (1) 求点 C 的坐标 (用含 a 的代数式表示) .
- (2) 连接 AC , BC , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 48, 求此抛物线的表达式 .
- (3) 在第 (2) 小题的条件下, 点 Q 为抛物线上一动点, 当四边形 $ACQB$ 的面积最大时, 求出最大面积, 并确定点 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $C(0, -8a)$.

(2) $y = 2x^2 - 4x - 16$.

(3) 64, $(2, -16)$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的对称轴为直线 $x = 1$,

而抛物线与 x 轴的一个交点 A 的坐标为 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点 B 的坐标为 $(4, 0)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+2)(x-4)$,

即 $y = ax^2 - 2ax - 8a$,

当 $x = 0$ 时, $y = -8a$,

$\therefore C(0, -8a)$.

(2) $\therefore AB = 6$, $OC = 8a$,

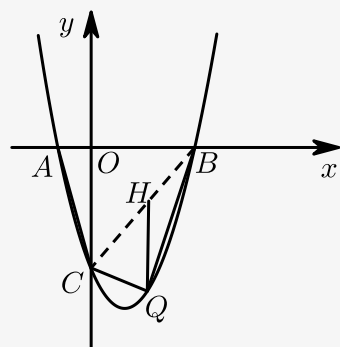
$\therefore S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 24a$,

$\therefore 24a = 48$,

解得 $a = 2$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = 2x^2 - 4x - 16$.

(3) 连接 BC , 过点 Q 作 QH 平行 y 轴交 BC 与点 H ,



设 BC 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b = -16 \\ 4k + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = -16 \\ k = 4 \end{cases},$$

$\therefore BC$ 解析式为 $y = 4x - 16$.

设点 Q 的坐标为 $(m, 2m^2 - 4m - 16)$.

$\therefore H$ 坐标为 $(m, 4m - 16)$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{四边形}ACQB} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCQ} \\ &= 48 + 2(4m - 16 - 2m^2 + 4m + 16), \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, 四边形 $ACQB$ 的面积最大, 最大面积为 64,

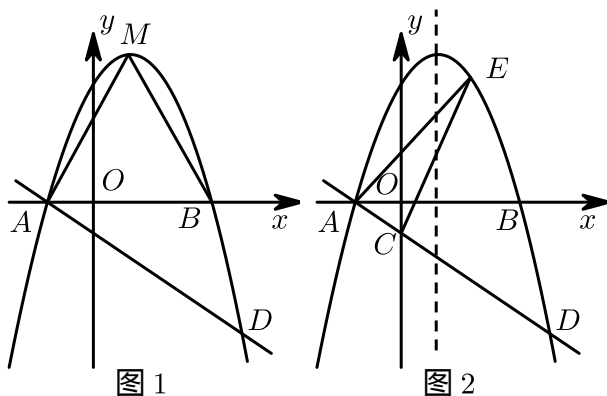
此时 Q 坐标为 $(2, -16)$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

练习7

16. 2016~2017学年江苏苏州高新区初三上学期期末第28题10分 ★★★

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = a(x+2)(x-4)$ ($a < 0$) 的图象与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 顶点为 M , 经过点 A 的直线 $l: y = ax + b$ 与 y 轴交于点 C , 与抛物线的另一个交点为 D .



(1) 直接写出点 A 的坐标 _____, 点 B 的坐标 _____.

(2) 如图(1), 若顶点 M 的坐标为 $(1, 9)$, 连接 BM, AM, BD , 请求出二次函数及一次函数的解析式, 并求出四边形 $ADBM$ 的面积.

(3) 如图(2), 点 E 是直线 l 上方的抛物线上的一点, 若 $\triangle ACE$ 的面积的最大值为 $\frac{49}{4}$ 时, 请直接写出此时 E 点的坐标.

【答案】 (1) $(-2, 0), (4, 0)$.

(2) $y = -x^2 + 2x + 8, y = -x - 2, S_{\text{四边形}ADBM} = 48$.

(3) $(\frac{3}{2}, \frac{35}{2})$

【解析】 (1) 如图(1), 令 $y = 0$, 则 $a(x+2)(x-4) = 0$,

解得 $x_1 = -2$, $x_2 = 4$,

所以 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$.

故答案为 : $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$.

(2) 如图 1 , 连接 BD .

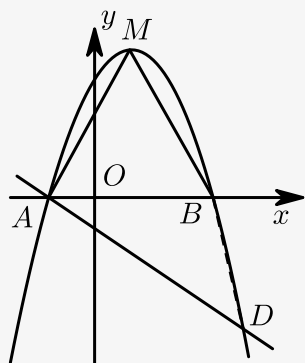


图 1

$\because$ 二次函数 $y = a(x+2)(x-4)$ 顶点为 $(1, 9)$,

带入即可求得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线为 $y = -x^2 + 2x + 8$,

$\because$ 一次函数 $y = ax + b$ 经过 $A(-2, 0)$,

$\therefore 0 = -2a + b$,

$\therefore b = 2a$,

$\therefore$ 一次函数为 : $y = -x - 2$,

联立一次函数与二次函数解析式可求 $D(5, -7)$,

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形ADBM}} &= S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ABD} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 + \frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 48 . \end{aligned}$$

(3) 如图 2 , 过点 E 作 $EF \parallel y$ 轴 , 交直线 AD 于点 F ,

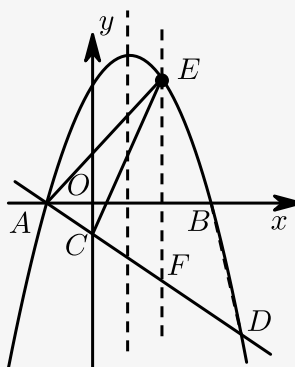


图 2

设 $E(x, ax^2 - 2ax - 8a)$,

则 $F(x, ax + 2a)$,

$$EF = ax^2 - 2ax - 8a - (ax + 2a) = ax^2 - 3ax - 10a ,$$

$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AFE} - S_{\triangle CFE}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(ax^2 - 3ax - 10a) \cdot (x+2) - \frac{1}{2}(ax^2 - 3ax - 10a) \cdot x \\ &= ax^2 - 3ax - 10a \end{aligned}$$

$$= a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49a}{4},$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle ACE \text{ 面积最大值} = -\frac{49}{4}a = \frac{49}{4},$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore \text{此时点 } E\left(\frac{3}{2}, \frac{35}{4}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

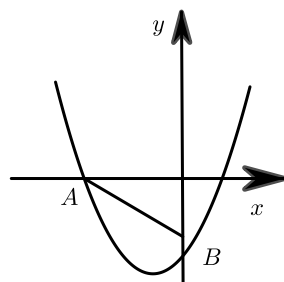
三、由面积求坐标

1. 面积相等问题

练习8

17. 2021年天津北辰区中考二模第25题10分 ★★★

如图，在平面直角坐标系中， O 为原点，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 经过点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(0, -2)$.



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 在抛物线上是否存在一点 P , 使 $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle OAB}$? 若存在 , 请求出点 P 的坐标 , 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$.

(2) 存在 , $(-2 + 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ 或 $(-2 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(-2, -3)$.

【解析】(1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线表达式得 ,

$$\begin{cases} c = -2 \\ \frac{1}{2} \times 16 - 4b + c = 0 \end{cases}$$

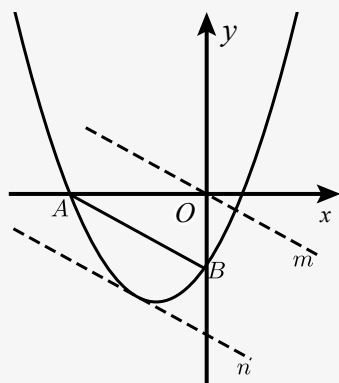
解得 $\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = -2 \end{cases}$

故抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$ ① .

(2) 存在 , 理由如下 :

过点 O 作直线 $m \parallel AB$, 在直线 AB 下方和直线 m 等间隔作直线 n ,

则直线 m 、 n 和抛物线的交点即为点 P ，



由点 A 、 B 的坐标得，直线 AB 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ，

则直线 m 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x$ ②，

直线 n 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x - 4$ ③，

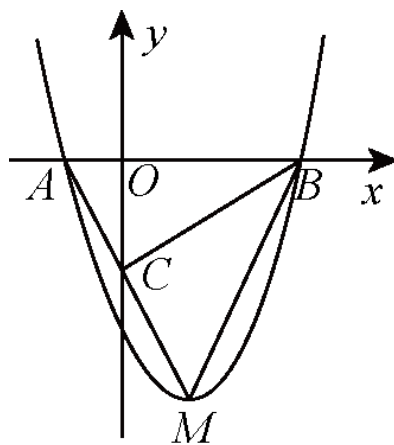
联立①②、①③并解得： $x = -2 \pm 2\sqrt{2}$ 或 $x = -2$ ，

故点 P 的坐标为 $(-2 - 2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ 或 $(-2 + 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ 或 $(-2, -3)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

18. ★★★

如图，二次函数 $y = (x - 1)^2 - 4$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点，顶点为 M ，直线 AM 与 y 轴交于点 C ，在抛物线上是否还存在点 P ，使得 $S_{\triangle PMB} = S_{\triangle BCM}$ ，如果不存在，说明理由；如存在，请求出 P 点的坐标。



【答案】 有两个 P 点，分别是 $(2 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ ， $(2 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 。

【解析】 根据抛物线解析式求得各点的坐标分别如下：

$A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, -2)$ 、 $M(1, -4)$

根据点 B 、 M 的坐标可得直线 BM 的解析式为： $y = 2x - 6$ 。

过点 C 作 BM 的平行线 $y = 2x - 2$ ，联立 $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{5} \\ y_1 = 2 + 2\sqrt{5} \end{cases}$ ， $\begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{5} \\ y_2 = 2 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

即有两个 P 点，分别是 $(2 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$ ， $(2 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ 。

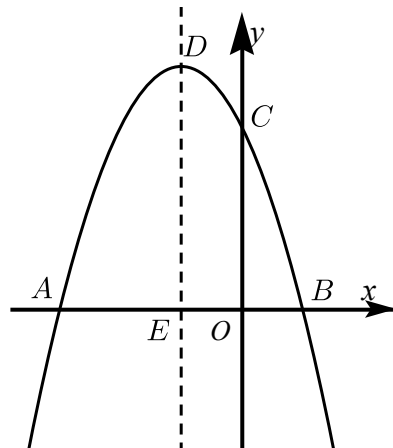
【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 面积成比例问题

练习9

19. ★★★★★

如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象过点 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 在对称轴左侧的抛物线上是否存在点 F ，使得 $2S_{\triangle FBC} = 3S_{\triangle EBC}$ ？若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，说明理由。

【答案】(1) 解析式为： $y = -x^2 - 2x + 3$ 。

(2) 存在； $F\left(\frac{1 - \sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{37} - 15}{2}\right)$ 。

【解析】(1) 将 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 。

$$\text{解} \begin{cases} c = 3 \\ -9 - 3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

(2) $S_{\triangle BCE} = 3$ ，又 $2S_{\triangle FBC} = 3S_{\triangle EBC}$ ，

$$\therefore S_{\triangle FBC} = \frac{9}{2}$$

如答图3，过 F 作 $FQ \perp x$ 轴交 BC 延长线于 Q ，

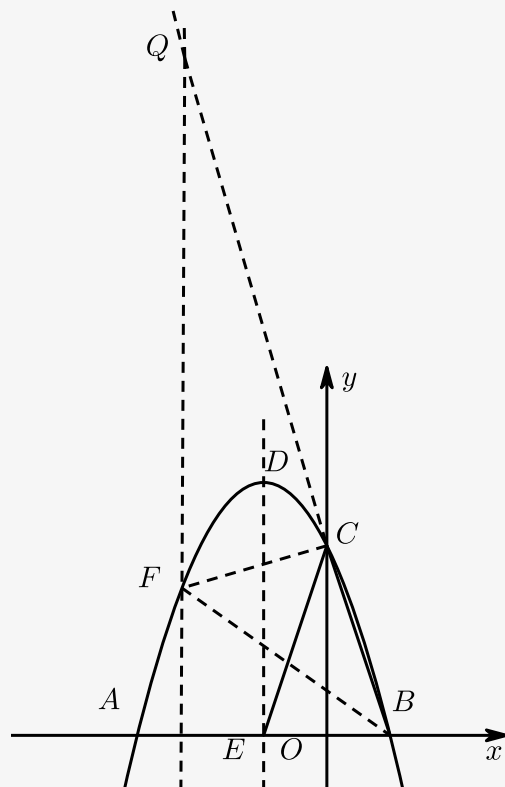
$$\text{则：} S_{\triangle FBC} = S_{\triangle FBQ} - S_{\triangle FCQ} = \frac{1}{2} FQ \cdot OB = \frac{9}{2}$$

$$BC: y = -3x + 3$$

设 $F(x_0, -x_0^2 - 2x_0 + 3)$ ，则 $Q(x_0, -3x_0 + 3)$ ，

$$\therefore -3x_0 + 3 + x_0^2 + 2x_0 - 3 = 9$$

$$\therefore F\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{37}-15}{2}\right).$$



答图3

【标注】【知识点】二次函数与面积